

基于椭球微凸体的结合面加、卸载特性研究

刘宇龙 兰国生 宋建国 李 勇 廖俊涛 康德朋

(太原科技大学 机械工程学院, 太原 030024)

摘要:【目的】针对粗糙结合面微凸体几何形貌非单一性导致接触特性模拟不准确的问题,探究不同离心率下椭球微凸体在法向加、卸载过程中的力学响应机制。【方法】首先,基于三维各向异性分形理论与赫兹接触理论,构建了椭球微凸体法向加、卸载动力学模型;然后,分别在微凸体顶端曲率半径取常数、顶端曲率半径随接触面积动态变化(改进模型)两种边界条件下进行了数值仿真;最后,引入灰铸铁磨削结合面的试验数据进行了对比分析,探讨了分形维数与分形粗糙度对接触特性的主导规律。【结果】数值模拟与试验验证表明,结合面粗糙表面上的微凸体由多重复杂的几何形状共同组成。在引入曲率半径随接触面积动态变化的改进模型中,理论预测值与试验曲线吻合良好,加载阶段误差控制在14%以内,卸载阶段误差控制在22%以内。在弹塑性变形的后半段,试验数据明显向离心率 e 为0.5~0.7的椭球仿真曲线靠拢,验证了改进椭球接触模型的合理性与工程参考价值。

关键词: 结合面; 椭球微凸体; 加卸载; 曲率半径; 分形理论

中图分类号: TH113.1; TH117.1 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2026.07.018

0 引言

机械结构中存在着大量的结合面,而结合面的表面是由不规则的凸起构成,在研究结合面的接触特性时,为计算方便,通过假设不同的理论模型作为研究前提,其中较为普及的是球形、圆柱、椭圆、圆锥等模型。而球模型其实就是离心率为零时椭球模型的一个特殊情况,所以研究离心率不同的椭球模型,寻找出一个更加符合实际情况的理论模型具有重要的意义。

Lin等^[1]以单个微凸体与刚性平面的接触为基础考虑了黏弹性时的接触特性,以此为基础建立了加、卸载的理论接触模型。Kadin等^[2]通过对加、卸载的研究,发现微凸体的高度分布函数会受到残余应力的影响,导致加载过程中的实际接触面积小于卸载过程的实际接触面积。Ovcharenko等^[3]¹⁵³⁻¹⁶⁰研究了微凸体与刚性平面接触时弹塑性阶段的加、卸载力学特性,并且考虑了无摩擦、有黏着情况的实际接触面积。Zait等^[4]借助有限元的方法,分析了加卸载时弹塑性阶段的接触特性,构建了卸载过程中残余变形量、实际变形量与实际接触面积之间的关系式。傅卫平等^[5]通过对微凸体加、卸载阶段的特性研究,建立了结合面静态法向加、卸载接触模型,得出了动态的接触刚度阻尼统计学模型。高志强等^[6]针对加、卸载时阻尼的能耗

问题,提出弹性、弹塑性、塑性微凸体侧向接触能耗的计算方法。孙万^[7]基于椭球型微凸体,推导了新的弹塑性阶段接触载荷和平均接触压力的表达式,构建了新的理论模型。王彦辉^[8]²⁰⁻²⁵以球形微凸体为基本模型,进行了结合面加、卸载接触特性多尺度分形理论建模及结果验证。殷东华等^[9]采用Hermite插值法,建立了单个微凸体弹塑性变形阶段的接触面积模型,通过引入平均压力参数,弥补了单一微凸体建模时的不连续性。

本文以椭球微凸体为理论模型,对各个变形阶段进行明确的划分,通过对不同阶段变形量与载荷之间的关系与试验数据结果进行对比,分析椭球模型的合理性。首先,假设微凸体顶端曲率半径取常数时,离心率不同的模型与试验数据结果对比分析;然后,通过曲率半径另一种取值方法,即微凸体顶端曲率半径随着接触面积变化,并分析分形维数与分形粗糙度对加、卸载时接触载荷与变形量之间的关系影响;最终,2种取值方法与试验数据进行对比分析得出结果。图1为理论流程图。

1 三维各向异性分形理论

仿真模拟三维各向异性粗糙表面的带随机相位的双变量Weierstrass-Mandelbrot(W-M)函数,在直角

收稿日期: 2024-08-22 修回日期: 2024-12-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275328)

作者简介: 刘宇龙,男,2000年生,江苏宿迁人,硕士研究生;主要研究方向为机械结合面;E-mail:1329878356@qq.com。

兰国生(通信作者),男,1975年生,山西太原人,博士,副教授;主要研究方向为机械结合面;E-mail:language@tyust.edu.cn。

引用格式: 刘宇龙,兰国生,宋建国,等.基于椭球微凸体的结合面加、卸载特性研究[J].机械强度,2026,48(7):156-165.

LIU Yulong, LAN Guosheng, SONG Jianguo, et al. Research on loading and unloading characteristics of joint surfaces based on ellipsoidal micro-asperities[J]. Journal of Mechanical Strength, 2026, 48(7): 156-165.



免费获取

坐标系中的表达式^[10]为

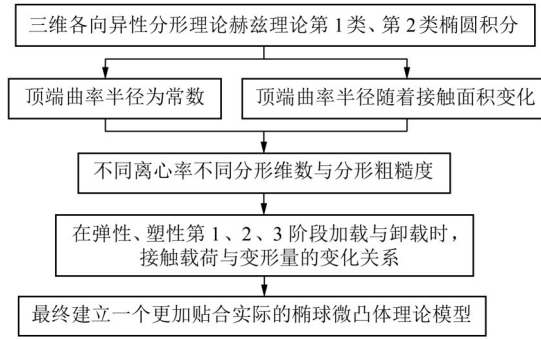


图 1 结合面加、卸载特性研究理论流程图

Fig. 1 Theoretical flowchart for research on loading and unloading characteristics

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} \sqrt{\frac{\ln \gamma}{M}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{n(D-3)} \{ \cos \phi_{m,n} - \cos \left[\frac{2\pi\gamma^n \sqrt{x^2 + y^2}}{L} \cos \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi m}{M} \right) + \phi_{m,n} \right] \} \quad (1)$$

式中, L 为采样长度; G 为分形粗糙度; γ 为尺度因子, $\gamma > 1$; M 为表面隆起总个数; D 为粗糙表面分形维数, $2 < D < 3$; n 为空间频率指数; $n_{\max}$ 为最大空间频率指数; $\phi_{m,n}$ 为在 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布的随机相位; x, y 为直角坐标系中的空间平面坐标; m 为变量, 取值为 $1 \sim M$ 。

令 $m = 1, M = 1$, 可将改进后的双变量 W-M 函数变为改进前的单变量 W-M 函数, 表达式为

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} \sqrt{\ln \gamma} \sum_{n=0}^{n_{\max}} [\cos \phi_{1,n} - \cos \left(\frac{2\pi\gamma^n}{L} - \phi_{1,n} \right)] / \gamma^{n(3-D)} \quad (2)$$

2 椭球微凸体加、卸载理论模型

2.1 椭球微凸体加载理论模型

首先, 研究单个微凸体的加、卸载特性研究, 将 2 个微凸体直接接触简化为 1 个刚性平面与 1 个椭球微凸体之间的接触, 如图 2 所示。图 2 中, a 为椭球微凸体长轴, 即顶端曲率半径; d 为接触时的接触直径; b 为微凸体短轴; δ 为法向变形量。

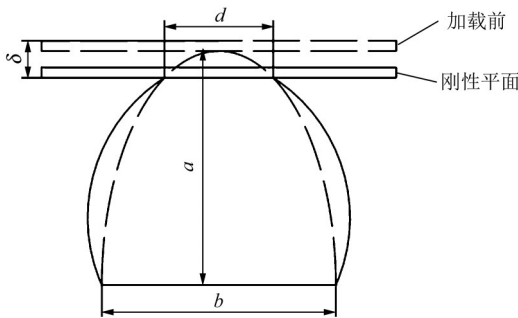


图 2 刚性平面与椭球微凸体法向接触加载模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of normal contact loading for ellipsoidal micro-asperity

由于椭圆抛物面微凸体的受力与变形机制与球

形具有类似的性质, 因此, 在形式上, 通常在球形微凸体的基础上, 附加关于离心率的修正系数, 获得椭球微凸体受力与变形之间的关系。

根据赫兹理论, 等效椭球的接触面法向变形量 δ 、等效曲率半径 R_m 、接触面积 a_e 、法向接触载荷 f_e 的关系^[11]为

$$a_e = \pi R_m \delta f_1(e) \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) \quad (4)$$

$$f_e = \frac{4}{3} E' R_m^{1/2} \delta^{3/2} f_2(e) \quad (5)$$

$$f_1(e) = \frac{E(e)}{\sqrt{1-e^2} K(e)} \quad (6)$$

$$f_2(e) = \frac{\pi \sqrt{E(e)}}{2 \sqrt{1-e^2} K^{3/2}(e)} \quad (7)$$

式中, e 为椭球微凸体的离心率; $f_1(e)$ 、 $f_2(e)$ 分别为等效接触面积、法向载荷的修正系数; R_a 、 R_b 分别为微凸体长轴、短轴方向的曲率半径; E' 为接触材料的等效弹性模量; $K(e)$ 、 $E(e)$ 分别为第 1 类、第 2 类椭圆积分, 其计算式分别为

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (8)$$

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (9)$$

式中, θ 为第 1 类、第 2 类椭圆积分变量。

根据赫兹接触理论, 在平面压力作用下, 微凸体发生弹性变形的弹性临界变形量^[12]为

$$\delta_e = \left(\frac{3\pi f_0}{4E'} \right)^2 R_m \quad (10)$$

式中, f_0 为作用在微凸体上的平均接触压力。

平均接触压力 f_0 为法向接触载荷 f_e 与接触面积 a_e 的比值, 表达式为

$$f_0 = \frac{f_e}{a_e} = \frac{f_e}{\pi ab} \quad (11)$$

当 $f_0 = KH$ 时, 接触材料开始进入塑性屈服状态, 其中, K 为硬度系数, $K = 0.454 + 0.41\nu$, ν 为较软材料的泊松比; H 为接触材料中较软材料的硬度, $H = 2.8\sigma_s$, σ_s 为屈服极限。

由式(3)、式(5)、式(10)、式(11)可得, 进入塑性变形时, 微凸体的弹性临界变形量 δ_e 的表达式为

$$\delta_e = \left(\frac{3\pi KH}{4E'} \right)^2 R_m \frac{f_1^2(e)}{f_2^2(e)} \quad (12)$$

在加载过程中, 由于微凸体的变形量会随着载荷的加大而增大, 此时微凸体的性质也会发生变化。根据变形特征, 可将整个变形阶段分为 3 个阶段: 弹性阶段、弹塑性阶段、塑性阶段。处在这 3 个阶段时的接触

载荷、接触面积、接触压力均应保持连续单调性。在弹性阶段,卸载后微凸体可以恢复到最初的状态;在弹塑性阶段,则会恢复到完全卸载后的状态;在塑性阶段,微凸体则处于加载后的状态,不发生变化。

构建理想模型需建立以下基本假设:①粗糙表面是各向同性的;②微凸体之间的相互作用忽略不计,且不发生较大变形;③假设微凸体顶端曲率半径 R 为常数。

2.1.1 弹性阶段

根据赫兹理论,发生弹性变形时,法向载荷 f_e 、刚度 K_e 的表达式分别为

$$f_e = \frac{4}{3} E' R_m^{1/2} \delta^{3/2} f_2(e) \quad (13)$$

$$K_e = \frac{df}{d\delta} = 2\pi^{-1/2} E' a_e^{1/2} f_1^{-1/2}(e) f_2(e) \quad (14)$$

2.1.2 弹塑性阶段

根据文献[13]可知,当微凸体的实际变形量大于弹性临界变形量 ($\delta > \delta_e$) 时,微凸体开始进入弹塑性阶段。根据变形量可将弹塑性阶段分为第1、第2两个变形阶段, $\delta_e \leq \delta \leq 6\delta_e$ 时,为弹塑性第1变形阶段, $6\delta_e \leq \delta \leq 110\delta_e$ 时,为弹塑性第2变形阶段。

在弹塑性第1、第2变形阶段,满足以下关系^{[14]3716-3729}:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_e} &= 0.93 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.136} \frac{f_1}{f_e} = 1.03 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.425}, \delta_e < \delta \leq 6\delta_e \quad (15) \\ \frac{a_2}{a_e} &= 0.94 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.146} \frac{f_2}{f_e} = 1.40 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.263}, 6\delta_e < \delta \leq 110\delta_e \end{aligned} \quad (16)$$

式中, a_1 、 f_1 分别为弹塑性第1变形阶段的实际接触面积、法向接触载荷; a_2 、 f_2 分别为弹塑性第2变形阶段的实际接触面积、法向接触载荷; a_e 、 f_e 分别为微凸体进入弹塑性阶段时的临界接触面积、临界法向接触载荷。

当椭球微凸体在弹塑性第1变形阶段时,微凸体的法向接触载荷为

$$f_1 = 1.03 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.425} f_e \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 1.37 \left[\left(\frac{3\pi KH}{4E'} \right)^2 R_m \frac{f_1^2(e)}{f_2^2(e)} \right]^{0.075} E' R_m^{1/2} f_2(e) \delta^{1.425} = \\ &1.312\pi^{0.15} K^{0.15} H^{0.15} E'^{0.85} R_m^{0.575} f_1^{0.15}(e) f_2^{0.85}(e) \delta^{1.425} \end{aligned} \quad (18)$$

当椭球微凸体在弹塑性第2变形阶段时,微凸体的法向接触载荷为

$$f_2 = 1.40 \left(\frac{\delta}{\delta_e} \right)^{1.263} f_e \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= 1.87 \left[\left(\frac{3\pi KH}{4E'} \right)^2 R_m \frac{f_1^2(e)}{f_2^2(e)} \right]^{0.237} E' R_m^{1/2} f_2(e) \delta^{1.263} = \\ &1.632\pi^{0.474} K^{0.474} H^{0.474} E'^{0.526} R_m^{0.737} f_1^{0.474}(e) f_2^{0.526}(e) \delta^{1.263} \end{aligned} \quad (20)$$

2.1.3 塑性阶段

当 $\delta > 110\delta_e$ 时,多尺度微凸体进入完全塑性变形阶段,此时,法向接触载荷 f_p 与接触面 a_p 的表达式分别为

$$f_p = 2\pi R_m H \delta \quad (21)$$

$$a_p = 2\pi R_m \delta \quad (22)$$

综上所述,椭球微凸体随着载荷的增大,变形量也随之增大,同时接触面积也会增大。依照弹性阶段、弹塑性第1变形阶段、弹塑性第2变形阶段、塑性阶段,在不同阶段间保持连续单调、无间断。

2.2 椭球微凸体卸载过程接触特性

当微凸体在卸载阶段,与加载阶段类似,在不同变形阶段有着不同的性质,进而出现不同的情况。当椭球微凸体在弹性变形阶段时,与加载一样,卸载后微凸体能够恢复到微凸体最初的状态,所以卸载前、后的接触载荷和接触面积相同。然而,微凸体在完全塑性变形阶段,卸除所有载荷,其依旧会处于完全加载的状态而不会恢复变形,所以研究卸载过程时,主要研究弹塑性阶段的卸载过程特性。

Etsion等^{[14]3716-3729}提出弹塑性变形球形微凸体的卸载残余变形量 δ_{res} 与其加载最大变形量 δ_{max} 存在如下关系:

$$\frac{\delta_{res}}{\delta_{max}} = \left[1 - \frac{1}{(\delta_{max}/\delta)^{0.28}} \right] \left[1 - \frac{1}{(\delta_{max}/\delta)^{0.69}} \right] \quad (23)$$

卸载后半径 R^u 与初始半径 R 的关系为

$$\frac{R^u}{R} = 1 + 1.275 \left(\frac{E'}{\sigma_s} \right)^{-0.216} \left(\frac{\delta_{max}}{\delta_e} - 1 \right) \quad (24)$$

式中, σ_s 为微凸体材料的屈服极限。

$$f^u = f_{max} \left(\frac{\delta^u - \delta_{res}}{\delta_{max} - \delta_{res}} \right)^{1.5(\delta_{max}/\delta_e)^{-0.0551}} \quad (25)$$

$$a^u = a_{max} \left(\frac{\delta^u - \delta_{res}}{\delta_{max} - \delta_{res}} \right)^{(\delta_{max}/\delta_e)^{-0.12}} \quad (26)$$

式中, f^u 、 a^u 、 δ^u 分别为卸载过程中的瞬时法向接触载荷、接触面积、法向变形量; f_{max} 、 a_{max} 分别为卸载起始点(即最大加载状态)的法向接触载荷、接触面积。

2.2.1 在弹塑性第1变形阶段

将式(15)代入式(25),可得卸载时接触载荷与变形量的关系为

$$f_1^u = 1.03 \left(\frac{\delta_{max}}{\delta_e} \right)^{1.425} f_e \left(\frac{\delta^u - \delta_{res}}{\delta_{max} - \delta_{res}} \right)^{1.5(\delta_{max}/\delta_e)^{-0.0551}} \quad (27)$$

将式(18)、式(26)代入式(27),可得卸载时接触载荷与接触面积的关系为

$$\begin{aligned} f_1^u &= 1.373 E R_m^{1/2} \delta_e^{0.075} f_2(e) \delta_{max}^{1.425} \cdot \\ &\left[\frac{a_1^u}{0.93 a_e (\delta_{max}/\delta_e)^{1.136}} \right]^2 (\delta_{max}/\delta_e)^{2.1779/3} \end{aligned} \quad (28)$$

2.2.2 在弹塑性第2变形阶段

将式(16)代入式(25),可得接触载荷与变形量的

关系^{[3]153-160}为

$$f_2^u = 1.40 \left(\frac{\delta_{\max}}{\delta_c} \right)^{1.263} f_c \left(\frac{\delta^u - \delta_{\text{res}}}{\delta_{\max} - \delta_{\text{res}}} \right)^{1.5} (\delta_{\max}/\delta_c)^{-0.0551} \quad (29)$$

式中, f_2^u 为弹塑性第 2 变形阶段开始卸载时的法向接触载荷。

将式(20)、式(26)代入式(29),可得接触载荷与接触面积的关系为

$$f_2^u = 1.867 E' R_m^{1/2} \delta_c^{0.237} f_2(e) \delta_{\max}^{1.263} \cdot \left[\frac{a_1^u}{0.93 a_c (\delta_{\max}/\delta_c)^{1.136}} \right]^{2(\delta_{\max}/\delta_c)^{2.1779/3}} \quad (30)$$

3 加、卸载过程仿真分析结果对比

为了便于仿真结果之间的对比,参数取值为:弹性模量 $E = 2.06 \times 10^{11}$ Pa;泊松比 $\nu = 0.26$;材料屈服极限 $\sigma_s = 418$ MPa;在加载阶段,刚性平面相对微凸体的位移为 $0 \sim -0.03 \mu\text{m}$,所以 $\delta_{\max} = 0.03 \mu\text{m}$,并从 $0.03 \mu\text{m}$ 处开始卸载;分形维数 $D = 2.5$;分形粗糙度 $G = 2.5 \times 10^{-10}$;椭球微凸体的离心率 e 分别取 0、0.5、0.7、0.9;椭圆长轴 $a = 1.0605 \mu\text{m}$;长轴、短轴的曲率半径的表达式分别为

$$\begin{cases} R_a = a^2/b \\ R_b = b^2/a \end{cases} \quad (31)$$

3.1 加载阶段

首先,对加载阶段进行仿真分析。加载主要经历弹性阶段、弹塑性阶段、塑性阶段。弹塑性阶段又可根据变形量分为弹塑性第 1、第 2 变形阶段。

在此,先对式(13)进行仿真,可得椭圆弹性阶段 ($0 \leq \delta < \delta_c$) 接触载荷-变形量的关系曲线如图 3 所示。

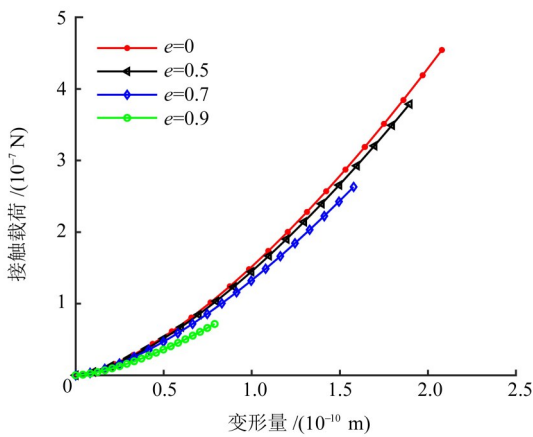


图 3 不同离心率模型加载弹性阶段接触载荷-变形量关系曲线

Fig. 3 Load-deformation curves in elastic phase for models with various eccentricities under loading

由图 3 可知,在弹性变形阶段 ($0 \leq \delta < \delta_c$),离心率不同的椭球模型,变形量均随着接触载荷的增大而增大。离心率不同,变形量随着接触载荷的变化速率也不同。离心率越大,椭球模型在受到载荷时的接触面积就会越小,进而影响变形量的变化。并且,即使

接触面积相同,离心率不同,接触点的接触性质也会不同。

对式(18)进行仿真,可得椭圆模型在弹塑性第 1 变形阶段 ($\delta_c \leq \delta < 6\delta_c$),接触载荷-变形量的关系曲线,如图 4 所示。

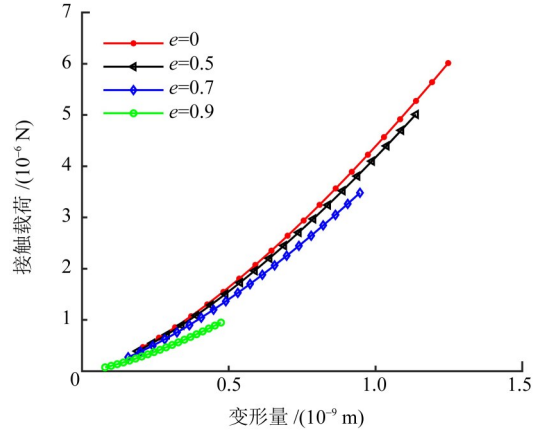


图 4 不同离心率模型加载第 1 弹塑性阶段接触载荷-变形量关系曲线

Fig. 4 Load-deformation curves in first elastoplastic stage for models with various eccentricities under loading

由图 4 可知,在弹塑性第 1 变形阶段,变形量依旧与弹性阶段一样,随着接触载荷的增大而增大,并且增长速度相较于弹性阶段更快,离心率越大,增长速度越缓慢。

对式(20)进行仿真,可得椭圆弹塑性第 2 变形阶段 ($6\delta_c \leq \delta < 110\delta_c$),接触载荷-变形量的关系曲线,如图 5 所示。

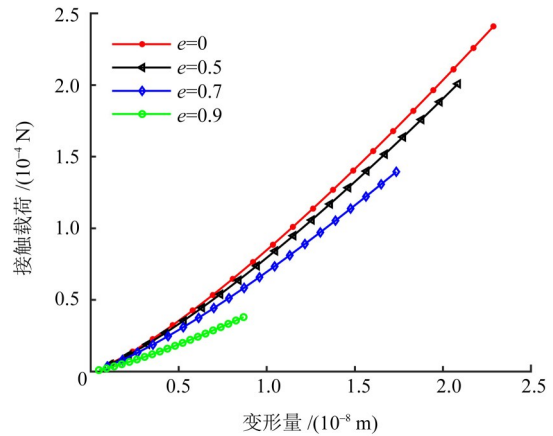


图 5 不同离心率模型加载第 2 弹塑性阶段接触载荷-变形量关系曲线

Fig. 5 Load-deformation curves in second elastoplastic stage for models with various eccentricities under loading

由图 5 可知,与最初的弹性阶段不同,变形量增大后,变形量与接触载荷的比值已接近正比例函数。并且,离心率 $e = 0$ 与 $e = 0.9$ 椭球模型的屈服极限差值达到了 5 倍。由此可得,不同加工方式形成的实际结合面情况也存在着很大的差异性。

由于弹塑性第 2 变形阶段相较于前面 2 个阶段跨度较长,为了便于分析加载阶段中接触载荷与变形量的关系,在此选取整个弹性阶段、弹塑性第 1 变形阶段

以及一部分弹塑性第2变形阶段($0 \leq \delta \leq 10\delta_c$)的曲线分析。先得到不同离心率模型的曲线对比图,再将各

个离心率模型的曲线单独列出,以便分析结果,其接触载荷-变形量的关系曲线如图6所示。

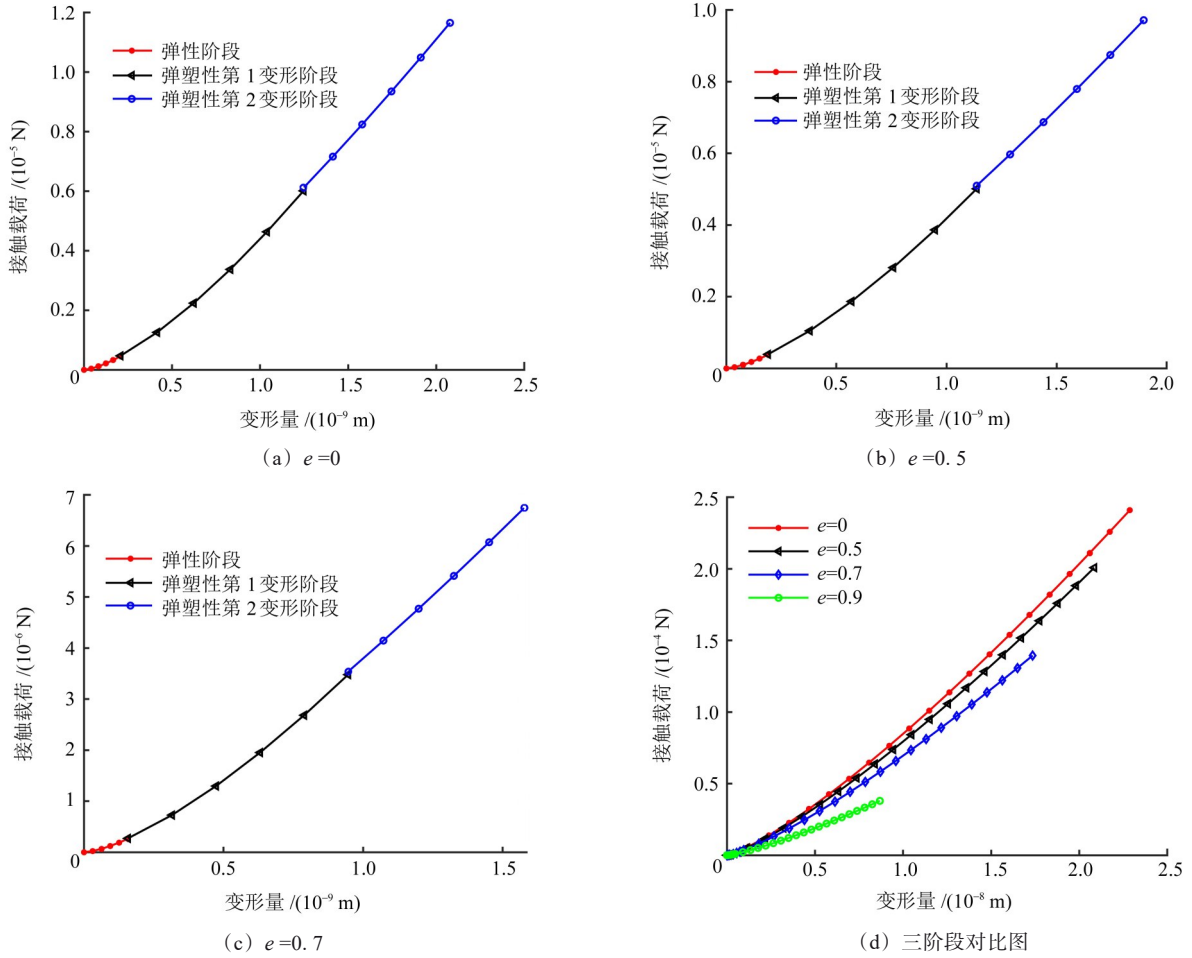


图6 不同离心率模型整个加载过程接触载荷-变形量曲线对比

Fig. 6 Comparison of load-deformation curves across loading stages for models with various eccentricities

图6(d)所示为离心率 e 分别为0、0.5、0.7、0.9时,3个阶段在 $0 \leq \delta \leq 10\delta_c$ 时,接触载荷-变形量的关系曲线。由图6(d)可知,在弹性阶段、弹塑性第1、第2变形阶段的接触载荷均满足连续、单调、无间断、不跳跃的特征。

3.2 卸载阶段

由于弹性阶段的微凸体在完全卸载后会恢复至最初形态,卸载曲线与加载曲线相同,因此不考虑从弹性阶段开始的卸载情况。

从弹塑性第1变形阶段末($6\delta_c$)开始卸载,接触载荷-变形量的关系曲线,如图7所示。由图7可知,在弹塑性阶段卸载开始后,变形量随着接触载荷的减小也逐渐减小,但最终会存在一定的残余变形量。这表明微凸体无法恢复到最初的形态,会发生一定程度的屈服。并且,离心率越大的微凸体,由于其临界变形量越小,因此其卸载后的残余变形量也越小。

从弹塑性第2变形阶段末开始卸载,接触载荷-变

形量的关系曲线,如图8所示。由图8可知,分析结果与从弹塑性第1变形阶段末开始卸载的结果相同,而在载荷相同时,离心率越大的微凸体,其残余变形量也越大,如图9所示。

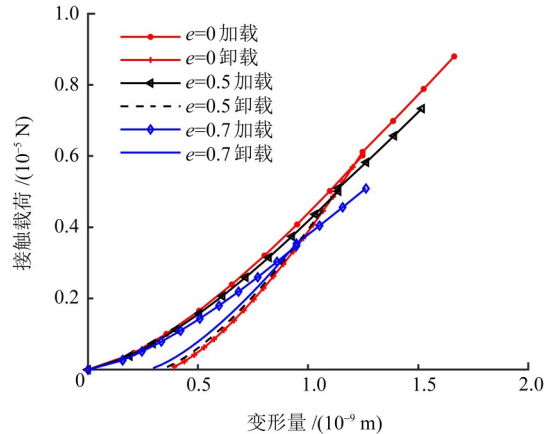


图7 不同离心率模型在第1弹塑性阶段末的卸载特性曲线

Fig. 7 Unloading curves at the end of the first elastoplastic stage for models with various eccentricities

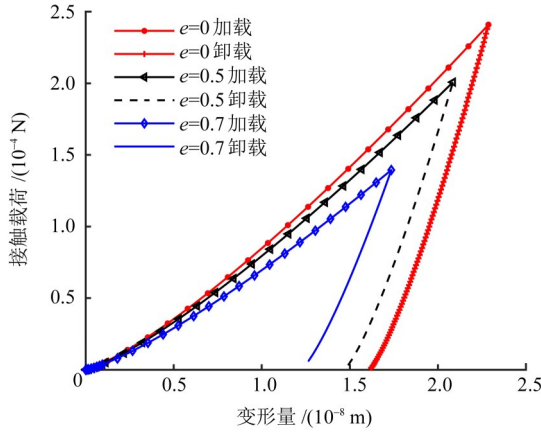


图 8 不同离心率模型在第 2 弹塑性阶段末的卸载特性曲线

Fig. 8 Unloading curves at the end of the second elastoplastic stage for models with various eccentricities

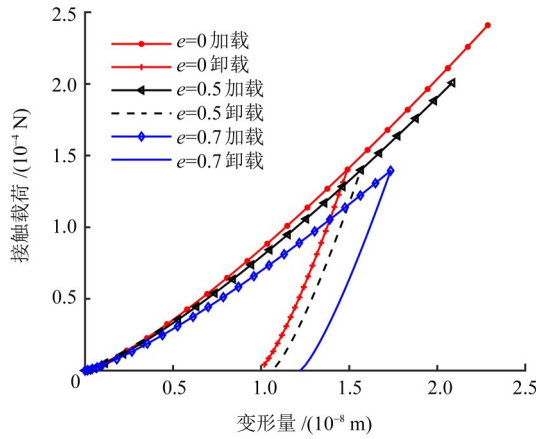


图 9 不同离心率模型在相同峰值载荷下的卸载响应曲线

Fig. 9 Unloading curves under identical peak load for models with various eccentricities

4 粗糙表面的真实曲率半径

前文假设中的第 3 条是将曲率半径 R_m 定为常数, 所以临界变形量也是常数。在此假设下可以得出, 在接触面积较小, 变形量较小时为弹性变形, 变形量与接触载荷之间为单调递增的变化关系; 在接触面积较大, 变形量较大时为塑性变形, 变形量与接触载荷之间为单调递增的趋势。但是, 在实际接触中, 微凸体的曲率半径却并不是一个常数, 如果依照分形理论取平均值, 与实际差距较大。这是因为曲率半径 R_m 取决于接触点的接触面积, 而接触面积 a_e 与接触长度 l 的关系^[15]为

$$l = a_e^{1/2} \quad (32)$$

若忽略更小的尺度细节, 在接触长度范围内的轮廓线可由 W-M 函数确定, 其数学表达式近似为余弦波, 表达式^[16]为

$$Z(x) = G^{D-1} l^{2-D} \cos \frac{\pi x}{l}, -l/2 < x < l/2 \quad (33)$$

式中, $Z(x)$ 为接触长度范围内的微凸体表面轮廓线高

度函数。

微凸体的顶端曲率半径为

$$R_m = \left| 1 / \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \right)_{x=0} \right| = \frac{a_e^{D/2}}{\pi^2 G^{D-1}} \quad (34)$$

由式(32)、式(33)可得, 微凸体变形量与接触面积的关系^{[17]6-10}为

$$\delta = G^{D-1} l^{2-D} = G^{D-1} a_e^{(2-D)/2} \quad (35)$$

由文献[17]⁶⁻¹⁰可得, 曲率半径与接触面积、变形量的关系为

$$R_m = \pi^{\frac{D-4}{2-D}} \delta^{\frac{D}{2-D}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \quad (36)$$

$$a_e = \pi^{\frac{2}{D-2}} \delta^{\frac{2}{2-D}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \quad (37)$$

$$\delta = \pi G^{D-1} a_e^{\frac{2-D}{2}} \quad (38)$$

不同阶段间存在 1 个临界值, 而临界变形量 δ_c 取决于微凸体的曲率半径, 其表达式为

$$\delta_c = \left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^2 R_m \quad (39)$$

由式(39)可得, 临界变形量与变形量的关系为

$$\delta_c = \left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^2 \pi^{\frac{D-4}{2-D}} \delta^{\frac{D}{2-D}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \quad (40)$$

在粗糙面接触过程中, 临界变形量不是固定不变的, 其会随着受力状态的改变而发生变化。当 $\delta = \delta_c$ 时, 可得

$$\delta_c = \left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G \quad (41)$$

由式(13)、式(15)、式(16)可得, 改进后加载阶段接触载荷与变形量的关系为

1) 在弹性阶段

$$f_e = \frac{4}{3} E' R_m^{1/2} \left[\left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G \right]^{3/2} f_2(e) \quad (42)$$

2) 在弹塑性第 1 变形阶段

$$f_1 = 1.37 \left[\left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G \right]^{0.075} E' R_m^{1/2} f_2(e) \delta^{1.425} \quad (43)$$

3) 在弹塑性第 2 变形阶段

$$f_2 = 1.87 \left[\left(\frac{3\pi H}{4E'} \right)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G \right]^{0.237} E' R_m^{1/2} f_2(e) \delta^{1.263} \quad (44)$$

5 仿真分析

仿真参数取值为: 分形粗糙度 $G = 8 \times 10^{-10}$, 分形维度 $D = 2.5$, 弹性模量 $E' = 2.06 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\nu = 0.26$, 材料屈服极限 $\sigma_s = 418$ MPa, 离心率 e 分别为 0、0.5、0.7。

对式(42)~式(44)进行仿真分析, 结果如图 10 所示。由图 10 可知, 在加载阶段, 变形量随着接触载荷的增大而增大, 并且离心率越小, 增速越快。在加载阶段函数始终保持单调、连续、无间断、不跳跃, 符合实际情况。

由式(41)可知, 临界变形量受到分形维度、分形

粗糙度的影响,进而对变形量、接触载荷产生影响。在此,选取不同的分形维度、分形粗糙度分析影响程度。选取仿真参数: $e = 0.5$, $a = 1.0605 \mu\text{m}$, D 的范围为 $2.1 \sim 2.9$, G 的范围为 $5 \times 10^{-10} \sim 2 \times 10^{-9}$ 。分析结果如图 11 所示。

由图 11 可知,在相同接触载荷下,分形维度越小,变形量越小;分形粗糙度越小,变形量越大。并且,分形维度、分形粗糙度对变形量的影响较大。需要说明的是,所提理论模型只适用于一定范围内的分形粗糙度与分形维数。

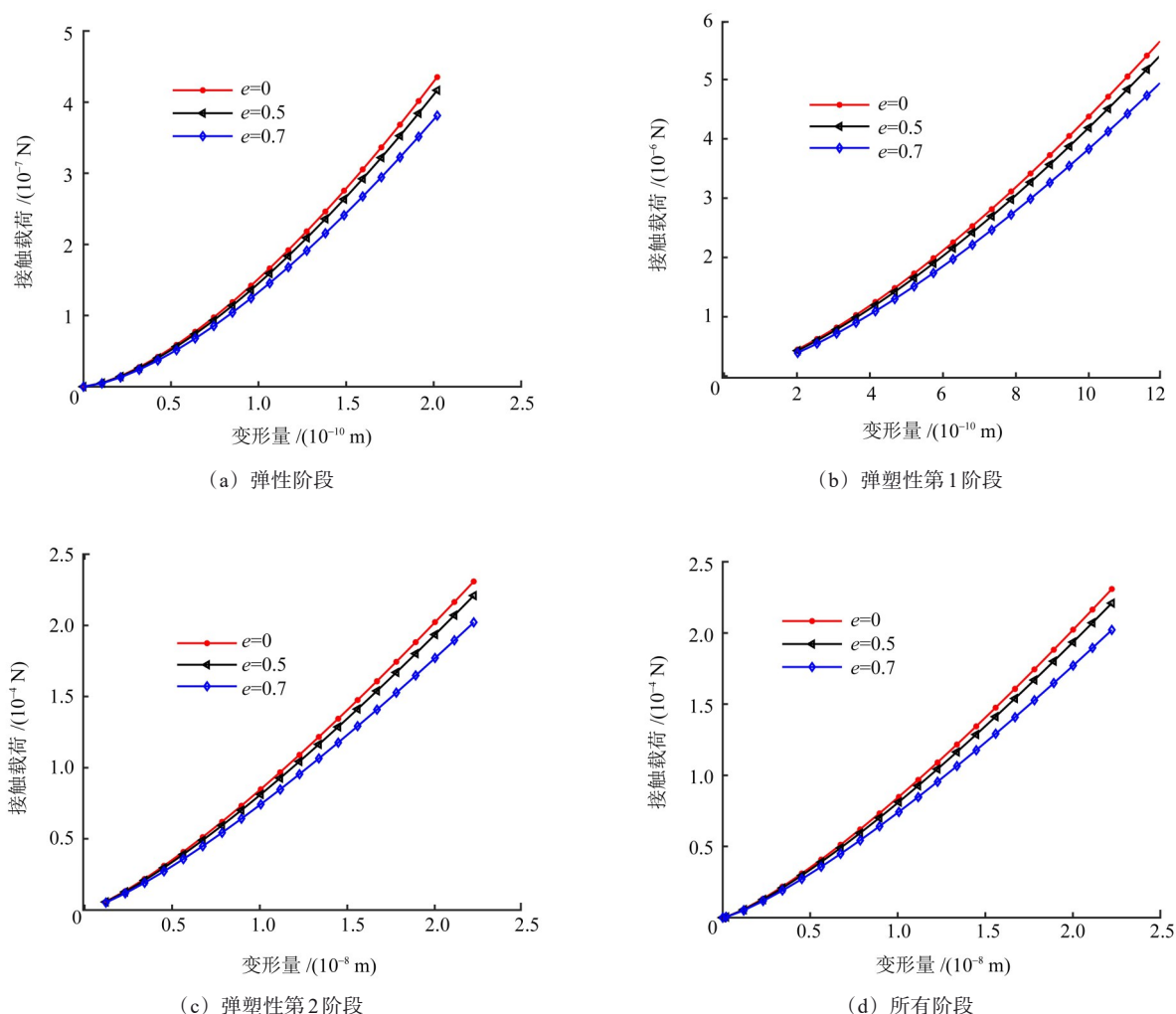
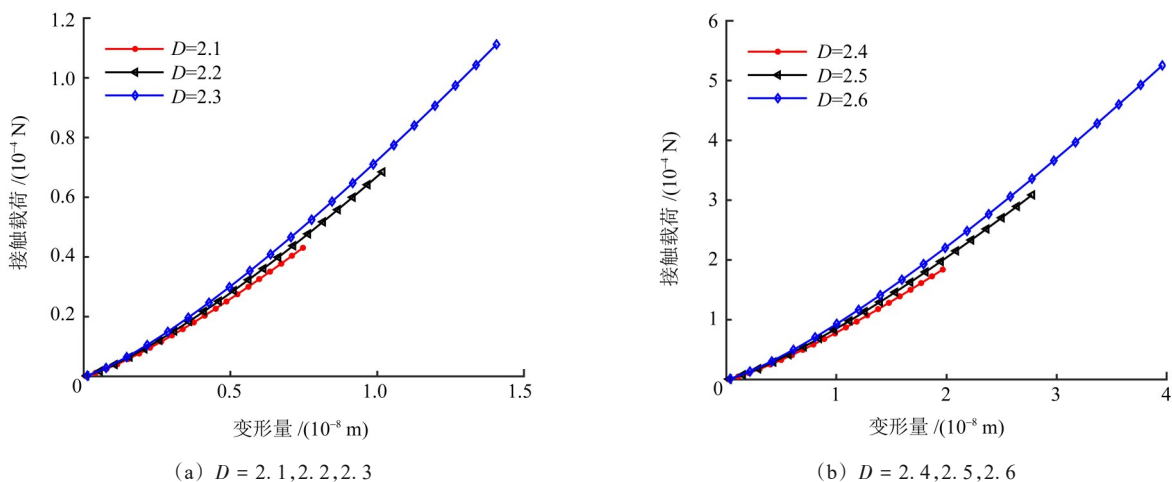


图 10 曲率半径改进模型在各加载阶段的接触载荷-变形量曲线

Fig. 10 Load-deformation curves of improved model during various loading stages



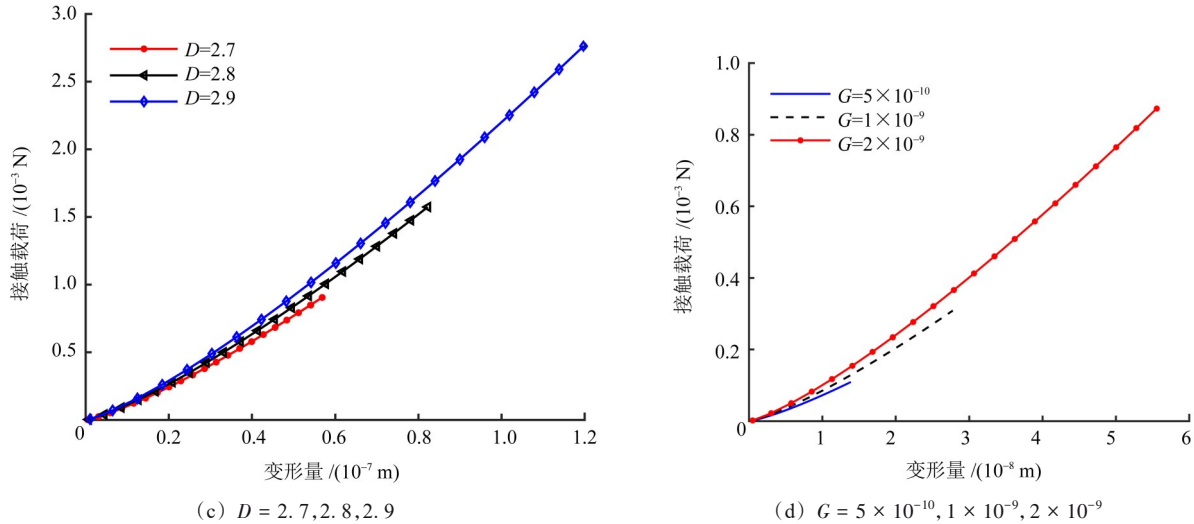


图 11 不同分形维数与分形粗糙度下加载阶段载荷-变形量变化规律

Fig. 11 Load-deformation curves under different fractal dimensions and fractal roughness in loading stage

6 理论模型试验验证

采用文献[8]²⁰⁻²⁵的试验及相关数据验证所提模型。2个接触结合面的材料均为灰铸铁,无润滑介质,弹性模量 $E' = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$,泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$,材料硬度 $H_{HB} = 220$,长轴的曲率半径 $R_a = 1.44$,分形粗糙度 $G = 2.2826 \times 10^{-10}$,分形维数 $D = 2.4058$ 。

仿真与试验结果的对比如图 12 所示。由图 12 可知,试验结果与理论模型一样,具有连续、单调、无间断、不跳跃的特性。并且,在弹性阶段、弹塑性第 1 变形阶段、弹塑性第 2 变形阶段的前段部分,试验结果与 $e = 0$ (即球模型)时的结果十分贴近,误差在 10% 以内。而弹塑性第 2 变形阶段的后半部分与离心率 $e = 0.5$ 时的仿真结果十分贴近,误差也在 10% 以内。虽然整体都符合单调递增的趋势,但试验结果与离心率较大时的理论模型结果相差较大。主要原因为粗糙表面上的微凸体并非单一形状,如果只采用单一的模型,并不能模拟出符合实际情况的粗糙表面接触特性。

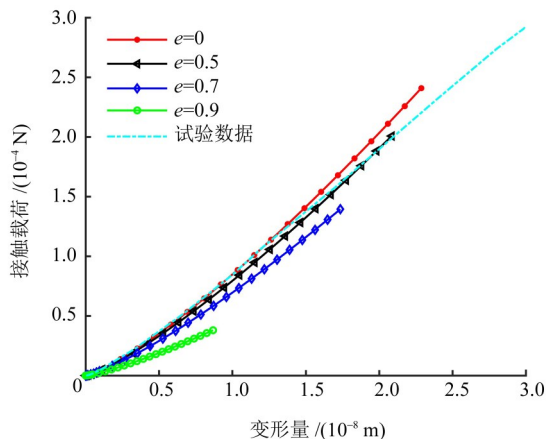
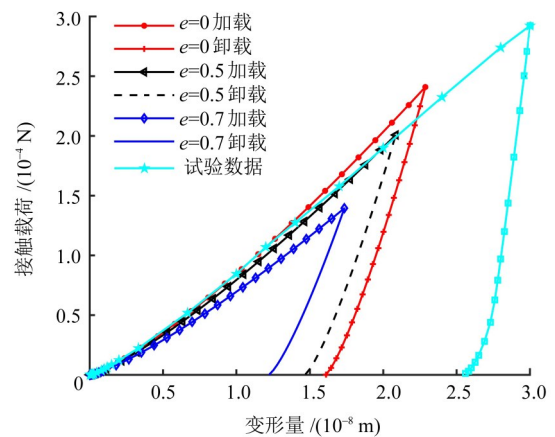


图 12 常曲率半径理论模型与试验数据在加载阶段的对比

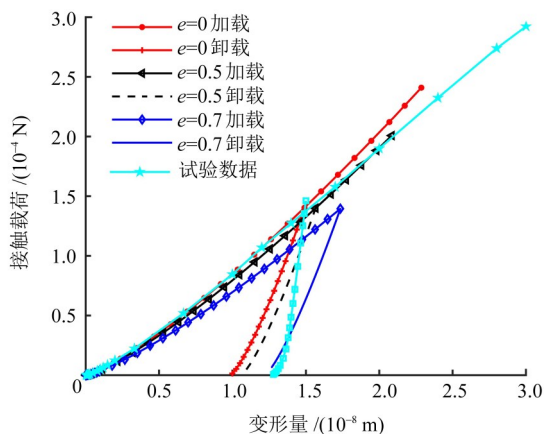
Fig. 12 Comparison between constant curvature radius model and test data in loading stage

在卸载阶段,不同离心率的理论模型的临界变形量不同。从弹塑性第 2 变形阶段末进行卸载,为了便于对比,选择在相同接触载荷处同时卸载,结果如图 13 所示。由图 13 可知,在卸载阶段,试验数据的初始变形量随着接触载荷的减小缓慢减小,在最后阶段变形量随着接触载荷的减小快速减小。在不同离心率的理论模型中均未能体现出这一点。这一情况可能与试验时的计算精度受限于变形单元的大小有关。当刚性平面和微凸体之间的载荷减小到某一极值时,微凸体与刚性面之间实现直接分离,即载荷突然为 0,此时变形量会发生较大变化。但是,理论模型与试验数据在整体走势上是吻合的,当与理论模型在相同接触载荷卸载时,变形量的误差也在 40% 以内,因此,椭球的理论模型是可行的。

当模型的曲率半径不取定值时,不同离心率模型下的仿真结果与试验数据对比,如图 14 所示。由图 14 可知,试验数据在弹性阶段以及弹塑性阶段的前半部分与离心率 $e = 0.5$ 时的仿真结果十分贴近;在弹塑性阶段的后半部分逐渐与离心率 $e = 0.7$ 时的仿真结果贴近。



(a) 阶段末卸载



(b) 同一载荷卸载

图 13 常曲率半径理论模型与试验数据在卸载阶段的对比

Fig. 13 Comparison between constant curvature radius model and test data in unloading stage

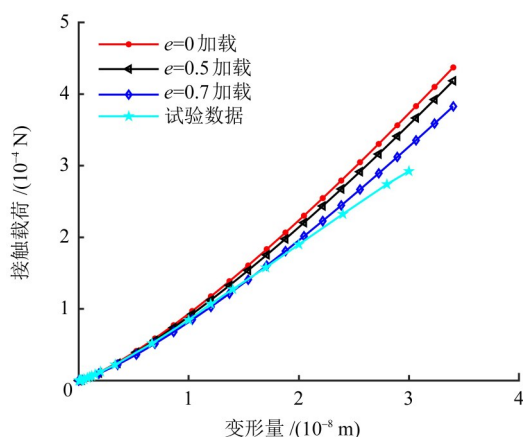


图 14 改进变曲率半径模型与试验数据在加载阶段的对比

Fig. 14 Comparison between improved variable curvature radius model and test data in loading stage

最终数据对比结果如图 15 所示。由图 15 可知,在分形维度、分形粗糙度选择合适的条件下,相较于曲率半径 R_m 取定值,其不为常数时,加载、卸载的结果与试验数据误差更小,其结果更具有参考意义。

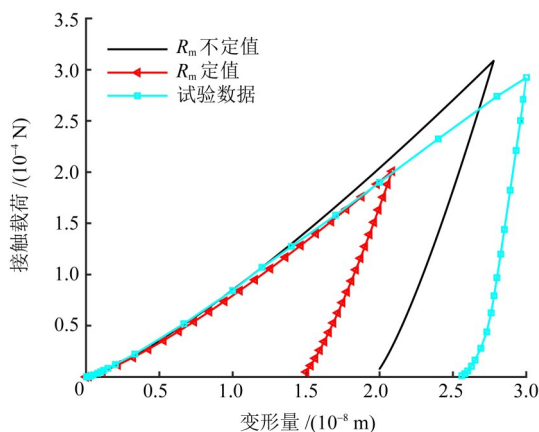


图 15 模型改进前、后与试验数据全生命周期加、卸载对比曲线

Fig. 15 Component-wide loading-unloading comparison between models before/after improvement and test data

7 结论

基于三维各向异性分形理论与椭球微凸体模型,通过分析不同离心率的微凸体模型在加载、卸载时接触载荷与变形量的关系,并与试验数据进行了对比验证。得出以下主要结论:

1) 基于椭球理论模型,先假设曲率半径取一常数,然后得出不同离心率的模型在加载、卸载时接触载荷与变形量的关系,验证所提模型的可行性。同时,证明了结合面粗糙表面上的微凸体并非单一形状。如果采用单一的模型,不能模拟出符合实际情况的接触特性。

2) 曲率半径为不定值时,考虑了分形维度、分形粗糙度对加载、卸载时接触载荷与变形量关系的影响。分析得出,在相同载荷下,分形维度越大对变形量的影响也就越大,分形粗糙度越大对变形量的影响反而越小。

3) 在选取合适的分形维度、分形粗糙度时,改进后的模型相较于曲率半径取常数时的模型结果更贴近试验数据。因此,改进后的理论模型具有实际参考意义。

参考文献 (References)

- [1] Lin Y Y, Hui C Y. Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading[J]. Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics, 2002, 40(9): 772-793.
- [2] Kadin Y, Kligerman Y, Etsion I. Unloading an elastic-plastic contact of rough surfaces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, 54(12): 2652-2674.
- [3] Ovcharenko A, Halperin G, Verberne G, et al. In situ investigation of the contact area in elastic-plastic spherical contact during loading-unloading[J]. Tribology Letters, 2007, 25(2): 153-160.
- [4] Zait Y, Kligerman Y, Etsion I. Unloading of an elastic-plastic spherical contact under stick contact condition [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(7/8): 990-997.
- [5] 傅卫平, 娄雷亭, 高志强, 等. 机械结合面法向接触刚度和阻尼的理论模型[J]. 机械工程学报, 2017, 53(9): 73-82.
Fu Weiping, Lou Leiting, Gao Zhiqiang, et al. Theoretical model for the contact stiffness and damping of mechanical joint surface [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(9): 73-82. (In Chinese)
- [6] 高志强, 傅卫平, 王雯, 等. 弹塑性微凸体侧向接触相互作用能耗 [J]. 力学学报, 2017, 49(4): 858-869.
Gao Zhiqiang, Fu Weiping, Wang Wen, et al. The contact energy dissipation of the lateral and interactional between the elastic-plastic asperities [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(4): 858-869. (In Chinese)
- [7] 孙万. 两接触粗糙表面法向接触特性三维分形模型[D]. 太原: 太原科技大学, 2021: 39-58.
Sun Wan. Three-dimensional fractal model of normal contact char-

- acteristics of two contact rough surfaces [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2021: 39-58. (In Chinese)
- [8] 王颜辉. 结合面加卸载接触特性多尺度分形理论建模及验证 [D]. 太原: 太原科技大学, 2021: 20-25.
- Wang Yanhui. Multi-scale fractal theory modeling and verification of loading and unloading contact characteristics of joint surface [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2021: 20-25. (In Chinese)
- [9] 殷东华, 张学良, 温淑花, 等. 结合面首次加载过程的法向接触刚度分形模型 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2022(12): 6-9.
- Yin Donghua, Zhang Xueliang, Wen Shuhua, et al. A fractal model of normal contact stiffness of fixed joint interface during the first loading [J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2022(12): 6-9. (In Chinese)
- [10] Horng J H. An elliptic elastic-plastic asperity microcontact model for rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 1998, 120(1): 82-88.
- [11] Jeng Y R, Peng S R. Static friction model of elastic-plastic contact behavior of surface with elliptical asperities [J]. Journal of Tribology, 2009, 131(2): 021403.
- [12] 李小彭, 牟佳信, 潘五九, 等. 具有分形特性的齿侧间隙对齿轮-轴承系统动态特性的影响 [J]. 机械工程学报, 2018, 54(9): 153-160.
- Li Xiaopeng, Mou Jiaxin, Pan Wujiu, et al. Influence of fractal backlash on dynamic behavior of gear-bearing system [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(9): 153-160. (In Chinese)
- [13] Kogut L, Etsion I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(5): 657-662.
- [14] Etsion I, Kligerman Y, Kadin Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(13): 3716-3729.
- [15] 贺林, 朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展 [J]. 摩擦学学报, 1996, 16(4): 375-384.
- He Lin, Zhu Jun. Fractal model for contact of rough surfaces [J]. Tribology, 1996, 16(4): 375-384. (In Chinese)
- [16] 张学良. 机械结合面动态特性及应用 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2002: 25-27.
- Zhang Xueliang. Dynamic characteristics and application of mechanical joint surface [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2002: 25-27. (In Chinese)
- [17] 李声祺, 兰国生, 李祥, 等. 机械结合面法向接触刚度三维分形理论模型 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2023(1): 6-10.
- Li Shengqi, Lan Guosheng, Li Xiang, et al. Three dimensional fractal theoretical model of normal contact stiffness of mechanical joint surface [J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2023(1): 6-10. (In Chinese)

Research on loading and unloading characteristics of joint surfaces based on ellipsoidal micro-asperities

LIU Yulong LAN Guosheng SONG Jianguo LI Yong LIAO Juntao KANG Depeng

(School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: [Objective] To address the inaccurate simulation of joint surface contact characteristics caused by the non-uniform geometric shapes of micro-asperities, the mechanical responses and deformation mechanisms of ellipsoidal micro-asperities with varying eccentricities during the normal loading and unloading processes are investigated. [Methods] Firstly, based on the three-dimensional anisotropic fractal theory and Hertzian contact mechanics, a theoretical loading-unloading contact model for ellipsoidal micro-asperities was established. Secondly, numerical simulations were performed under two distinct boundary scenarios: a constant tip curvature radius and a dynamic tip curvature radius varying with the contact area. Finally, test data from a gray cast iron grinding joint surface were introduced to validate the models, and the influences of fractal dimension and fractal roughness on the contact load were analyzed. [Results] The comparative analysis demonstrates that the micro-asperities on rough surfaces are composed of multi-shaped geometries rather than a single profile. For the improved model where the curvature radius varies dynamically with the contact area, the simulated curves exhibit excellent agreement with the test data, restricting errors to within 14% during the loading stage and 22% during the unloading stage. In the late elastoplastic stage, the test trajectory shifts toward the ellipsoidal model with eccentricities between 0.5 and 0.7, confirming the higher bi-directional accuracy and physical feasibility of the improved model.

Key words: Joint surface; Ellipsoidal micro-asperity; Loading and unloading; Radius of curvature; Fractal theory

Corresponding author: LAN Guosheng, E-mail: languosheng@tyust.edu.cn

Fund: National Natural Science Foundation of China (51275328)

Received: 2024-08-22

Revised: 2024-12-11

(编辑: 李立)